OFFICE DU BACCALAUREAT DU CAMEROUN

....

DIRECTION

....

DIVISION DES EXAMENS

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

....

Paix – Travail – Patrie

....

CORRIGÉ HARMONISÉ NATIONAL

EXAMEN : BACCALAUREAT
EPREUVE : MATHÉMATIQUES
SÉRIE / SPÉCIALITÉ : D

SESSION : 2023
DUREE : 4 h
COEFFICIENT : 4

REFERENCES ET SOLUTIONS	BAREMES	COMMENTAIRES
Partie A : Evaluation des ressources	**15 points**	
EXERCICE 1	**4,75 points**	
1. Déterminons les racines cubiques de 8 Déterminons les solutions complexes de l'équation $z^3 = 8$ On a $z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4) = 0 \Leftrightarrow z = 2 \;\; ou \;\; z^2+2z+4=0$ Résolvons l'équation : $z^2+2z+4=0$ $\Delta = 2^2 - 4\times 4 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$ et les solutions de cette équations sont : $-1-i\sqrt{3}$ et $-1+i\sqrt{3}$. Donc les racines cubiques de 8 sont : $\mathbf{2,\; -1-i\sqrt{3} \;\; et \;\; -1+i\sqrt{3}}$	(0,75pt)	0,25 pt par racine juste **NB :** Apprécier toute autre méthode de résolution
2.a) Montrons que $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et donnons la nature du triangle ABC $$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B} = \frac{2+1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$ Donc le triangle ABC est équilatéral	(0,75pt)	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour la conclusion 0,25 pt pour la nature juste de ABC
2.b) Déterminons le centre et le rayon du cercle(Γ_1) circonscrit au triangle ABC Soit G le centre du cercle circonscrit, G est aussi le centre de gravité de ce triangle car ABC est un triangle équilatéral. Le point G a pour affixe $z_G = \frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C) = 0$		0,5 pt pour la démarche 0,5 pt pour le centre 0,5 pour le rayon **NB :** Apprécier toute autre

donc $G = O$origine du repère et le rayon $R_1 = OC = 2$	**(1,5pt)**	méthode de résolution
2.c) **Montrons que l'ensemble (Γ_2) des points M d'affixe z qui vérifie $2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$ est le cercle de centre Ω d'affixe -2 et de rayon 2.** Soit $M(x,y)$ un point de (Γ_2) d'affixe $z = x+iy$, on a $z+\bar{\bar{z}} = 2x$ et $z \times \bar{\bar{z}} = x^2+y^2$ d'où $4x+x^2+y^2=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=2^2$. Ainsi (Γ_2) est le cercle de centre Ω d'affixe $z_\Omega = -2$ et de rayon $R_2 = 2$	**(0,5pt)**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour la conclusion
2d) **Vérifions que A et B sont des éléments de(Γ_2).** $2(z_A+\overline{z_A})+z_A\overline{z_A} = -4+2^2 = 0$ donc $A \in (\Gamma_2)$. $2(z_B+\overline{z_B})+z_B\overline{z_B} = -4+2^2 = 0$ donc $B \in (\Gamma_2)$.	**(0,5pt)**	0,25 pt par bonne justification
2.e) **Déterminons l'ecriture complexe de la similitude S de centre Ω telle que S(A)=B** L'ecriture complexe de la similitude s'écrit sous la forme $z' = az+b$ $S(\Omega)=\Omega \Leftrightarrow -2a+b=-2$ et $S(A)=B \Leftrightarrow (-1+i\sqrt{3})a+b = -1-i\sqrt{3}$ On résout le système $\begin{cases} -2a+b=-2 \\ (-1+i\sqrt{3})a+b=-1-i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = -3-i\sqrt{3} \end{cases}$ Par conséquent $\boldsymbol{z' = (\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z - 3 - i\sqrt{3}}$	**(0,75pt)**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt par coefficient juste
EXERCICE 2	**3 points**	
1.a) Résolvons l'équation (E): $y'-2y=0$ dans IR. (E): $y'-2y=0 \Leftrightarrow y'=2y \Leftrightarrow y : x \mapsto ke^{2x},\ k \in \mathrm{IR}$	**0,5 pt**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
1.b) Montrons que la solution f de (E) telle que $f(0)=1$ est définie par : $f(x)=e^{2x}$. f solution de (E) donc $f(x)=ke^{2x}$. $f(0)=1 \Rightarrow k=1$ donc $f(x)=e^{2x}$	**0,5 pt**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour la conclusion
1.c) Déterminons en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n;n+1]$. Cette valeur est : $M = \frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1} f(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}e^{2n}(e^2-1)$.	**0,5 pt**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
2.a) Calculons $u_0$et u_1. $u_0 = \frac{1}{2}(e^2-1)$ et $u_1 = \frac{1}{2}e^2(e^2-1)$	**0,5 pt**	0,25 pt par terme juste
2. b) Montrons que (U_n) est une suite géométrique de raison e^2. Soit $n \in \mathrm{IN}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}(e^2-1)e^{2n+2} = e^2\left[\frac{1}{2}(e^2-1)e^{2n}\right] = e^2U_n$. Donc (U_n) est une suite géométrique de raison e^2.	**0,5 pt**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour la conclusion

2. c) Déterminons la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{2023}$. Cette somme est composée de 2024 termes consécutifs de la suite (U_n), on a donc $u_0 + u_1 + \cdots + u_{2023} = \frac{U_0(e^{2\times 2024} - 1)}{e^2 - 1} = \frac{(e^{4048} - 1)}{e^2 - 1} \times \frac{1}{2}(e^2 - 1) = \frac{e^{4048} - 1}{2}$	**0,5 pt**	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
EXERCICE 3	**3 points**	
I. Une urne contient 5 jetons portant les nombres : 1, e, e^2, $\frac{1}{e}$ et $\frac{1}{e^2}$		
1. Déterminons la probabilité de l'événement A : « M appartient à l'axe des réels » Le point M a pour affixe $z = lna + ilnb$ et appartient à l'axe $(O, \vec{\imath})$, donc $lnb = 0 \Leftrightarrow b = 1$. Si $U = \left\{1,\ e,\ e^2,\ \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}\right\}$ alors l'univers des éventualités est $\Omega = U \times U$ $Card(A) = Card(U \times \{1\}) = 5 \times 1 = 5$ et $card\ (\Omega) = 5 \times 5 = 25$ donc $P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$	**(0,75pt)**	0,5 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat NB : Apprécier toute autre méthode de résolution
2. Montrons que la probabilité de l'événement B : « M appartient à l'axe des imaginaires purs » est égale à 0,2 Le point M a pour affixe $z = lna + ilnb$ et appartient à l'axe $(O, \vec{\jmath})$, donc $lna = 0 \Leftrightarrow a = 1. card(B) = card(\{1\} \times U) = 5$ et $card\ (\Omega) = 5 \times 5 = 25$ donc $P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \mathbf{0,2}$.	**(0,75pt)**	0,5 pt pour la démarche 0,25 pt pour la conclusion
II.1. Déterminons une équation de la droite de Mayer de (x, y) Déterminons les coordonnées des points moyens partiels G_1 et G_2 $x_1 = \frac{1}{3}(7 + 7{,}8 + 9{,}2) = 8$ et $y_1 = \frac{1}{3}(237 + 235 + 248) = 240$ donc $G_1(8, 240)$ $x_2 = \frac{1}{3}(10{,}5 + 11 + 11{,}5) = 11$ et $y_2 = \frac{1}{3}(250 + 268 + 259) = 259$ donc $G_2(11, 259)$ La droite de Mayer passe par les points G_1 et G_2 et s'écrit sous la forme $y = ax + b$ $a = \frac{240-259}{8-11} = \frac{19}{3}$ et $b = 240 - \frac{19}{3} \times 8 = \frac{568}{3}$ donc la droite de Mayer est : $y = \frac{19}{3}x + \frac{568}{3}$	**(1pt)**	**0,25 pt** par point moyen de sous nuage **0,25 pt** par coefficient de l'équation
2.Déduisons-en une estimation des frais de publicité d'une entreprise dont le chiffre d'affaires est de 3 milliards de francs Pour 3 milliards de chiffre d'affaires, $y = 300$ et on résout l'équation : $\frac{19}{3}x + \frac{568}{3} = 300$; $donc\ x = 17{,}47$ donc les frais de publicité sont environ de **174.700.000 F**	**(0,5pt)**	**0,25 pt** pour la démarche **0,25 pt** pour le résultat **NB : Accepter toute valeur approchée de ces frais de publicité.**
EXERCICE 4	**4,25 points**	

1. On donne la fonction g définie sur $D =]-1,0[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x+1)}$		
a) **Calculons les limites de g à droite de -1 et à gauche de 0** $\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+}(\frac{1}{x(x+1)}) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x(x+1)}) = -\infty$	(0,5pt)	0,25 pt pour chaque limite trouvée
b) **Etudions les variations de g** La dérivée de g est telle que $g'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}$ et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x-1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ Pour $x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right]$, $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]$ Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[$, $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$	(0,5pt)	0,25 pt pour la dérivée 0,25 pt pour le sens de variation de g
c) **Déduisons-en que pour tout $x \in D, g(x) < 0$** $g(]-1,0[) =]-\infty, -4]$ donc pour tout $x \in D, g(x) < 0$	(0,25pt)	
d) **Montrons que pour tout $x \in D$, $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$** Pour tout $x \in D, \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x} = g(x)$	(0,5pt)	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
e) **Déduisons-en sur $]-1,0[$ la primitive G de g qui s'annule en $-\frac{1}{2}$** On a $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ donc une primitive de g est définie par: $G(x) = ln\|x\| - ln\|x+1\| + a$ $(a \in \mathbb{R})$. Or $G\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow a = 0$ donc $G(x) = ln\|x\| - ln\|x+1\|$. En outre, $x \in D =]-1,0[$, $\|x\| = -x$ *et* $\|x+1\| = x+1$ donc $G(x) = \ln(-x) + \ln(x+1) = \ln(\frac{-x}{x+1})$.	(0,5pt)	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
2. On considère la fonction f définie sur $]-1,0[$ par : $f(x) = \ln(\frac{-x}{x+1})$		
a) **Calculons les limites de f aux bornes de l'intervalle $]-1,0[$** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(\ln\left(\frac{-x}{x+1}\right) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{-x}{x+1}\right) = +\infty$	(1pt)	0,5 pt pour chaque limite trouvée
b) **Montrons que pour tout $x \in]-1,0[, f'(x) = g(x)$** Pour $x \in]-1,0[$, $f'(x) = \frac{\left(\frac{-x}{x+1}\right)'}{\left(\frac{-x}{x+1}\right)} = \frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{\left(\frac{-x}{x+1}\right)} = \frac{-1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{-x} = \frac{1}{x(x+1)} = g(x)$	(0,5pt)	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat
c) **Déduisons-en le sens de variation de f sur $]-1,0[$** Pour tout $x \in]-1,0[, f'(x) = g(x)$ et d'après la question 1.c) $g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$.	(0,5pt)	0,25 pt pour la démarche 0,25 pt pour le résultat

Ainsi la fonction f est strictement décroissante sur $]-1,0[$,		

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES	5 points	
REFERENCES ET SOLUTIONS	Critères	Indicateurs et barèmes
Tâche 1 : **A partir de combien d'années les intérêts produits à la banque permettront-ils à Tang d'acheter un autre billet d'avion pour son épouse ?** Soit $u_o = a$, le montant d'argent du billet d'avion déposé dans la banque ($a \in \mathbb{R}_+$) Après un an, le montant est de : $u_1 = u_0 + 0{,}05u_0 = 1{,}05a$ Après deux ans, le montant est de : $u_2 = u_1 + 0{,}05u_1 = 1{,}05u_1 = (1{,}05)^2a$ Après n années ($n \in \mathbb{N}$), le montant est de : $u_n = (1{,}05)^n a$. On a ainsi construit une suite (u_n) qui est géométrique de raison 1,05. Or pour acheter le billet d'avion de son épouse, il faut que : $u_n \geq 2u_0 \Leftrightarrow (1{,}05)^n a \geq 2a \ \Leftrightarrow (1{,}05)^n \geq 2 \ \Leftrightarrow n\ln(1{,}05) \geq \ln 2$ donc $n \geq 14{,}08$ Tang doit attendre **15 ans** pour acheter un billet d'avion à son épouse **NB :** Apprécier toute autre méthode de résolution.	**C₁ :** Interprétation correcte de la situation **0,5 pt**	**0,25pt** pour l'idée d'utiliser une suite **0,25pt** pour avoir envisagé d'utiliser une suite géométrique.
	C₂ : utilisation correcte des outils **0,5pt**	**0,25pt** pour $u_n = (1{,}05)^n a$ **0,25 pt** pour la résolution de l'inéquation $(1{,}05)^n \geq 2$
	C₃ : Cohérence **0,5pt**	**0,5pt** pour un bon enchaînement du raisonnement.
Tâche 2 : **Tang pourra-t-il à partir des loyers de ses maisons réaliser son projet ?** Etudions la variation de la fonction S définie par : $S(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 15x^2 + 63x)$ sur l'intervalle $[1,9]$. $S'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 10x + 21) = \frac{3}{2}(x-3)(x-7)$. $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 7$. • Sur [1,3] la fonction S est croissante et prend des valeurs allant de 24,5 à 40,5 • Sur [3,7] la fonction S est décroissante et prend des valeurs allant de 40,5 à 24,5 • Sur [7,9] la fonction S est croissante et prend des valeurs allant de 24,5 à 40,5. **En conclusion** : le montant des loyers au cours des 9 premières années a des valeurs qui se situent entre 24.500.000 F et 40.500.000 F et n'ont pas atteint les 41.000.000 F recherchés. Tang ne pourra donc pas réaliser son projet. **NB :** D'autres méthodes sont envisageables.	**C₁ :** Interprétation correcte de la situation**0,5 pt**	**0,25pt** pour l'idée d'étudier la variation de S **0,25pt** pour l'idée de travailler dans $[1,9]$
	C₂ : utilisation correcte des outils **0,5pt**	**0,25pt** pour la dérivée **0,25pt** pour les variations de S
	C₃ : Cohérence **0,5pt**	**0,5pt** pour un bon enchaînement du raisonnement

Tâche 3 : **Tang pourra-t-il acheter ce sac ?** Soit x la valeur de la baisse subie par les articles • Si P_1 est le prix de la veste après la première baisse, on a $P_1 = 140.000 - 1400x$ • Si P_2 est le prix de la veste après la deuxième baisse, on a : $P_2 = P_1 - \frac{P_1}{100}x = 140000 - 2800x + 14x^2$ Or $P_2 = 126350 \Leftrightarrow 14x^2 - 2800x + 13650 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 - 200x + 975 = 0}$ **(E)**. Les solutions de (E) sont 5 et 195. La valeur exacte de la baisse est $\boldsymbol{x = 5}$. Le prix du sac après la deuxième baisse : $P = 20000 - 20000 \times \frac{5}{100} = 19000$, soit 19000F. **Conclusion** : Tang ne pourra pas acheter ce sac car la somme d'argent dont il dispose est plus petite que 19.000 F.	**C_1 :** Interprétation correcte de la situation**0,5 pt**	**0,25pt** pour avoir envisagé le choix d'une inconnue **0,25pt** pour avoir envisagé l'utilisation d'une équation du second degré.
	C_2 : utilisation correcte des outils **0,5pt**	**0,25pt** pour l'obtention de l'équation du second degré. **0,25pt** pour les solutions de l'équation
	C_3 : Cohérence **0,5pt**	**0,5pt** pour un bon enchaînement du raisonnement.
Présentation	**0,5pt**	

Fait à Yaoundé le 02/06/2023

Le Président du jury d'harmonisation

Tel: 699657338

Echouaffi Romuald

PLEG - Hors Echelle
IPN / MATHS